Autoevaluación

Página 242

1 **Dados los vectores** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ **y** $\vec{v}(0, -2)$**, calcula:**

a) $|\vec{u}|$ **b)** $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ **c)** $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v})$

$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ $\vec{v}(0, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right) + 3(0, -2) = (-1, 2) + (0, -6) = (-1, -4)$

c) $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 2 \cdot (-2) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -4\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)\right) = -8$

2 **Determina el valor de** k **para que los vectores** $\vec{a}(1, 3)$ **y** $\vec{b}(6, k)$ **sean ortogonales.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3) \cdot (6, k) = 6 + 3k = 0 \rightarrow k = -2$

3 **Dados los vectores** $\vec{u}(-1, 0)$ **y** $\vec{v}(1, 2)$**:**

a) Calcula $proy_{\vec{u}}\, \vec{v}$**.**

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$**.**

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w}(4, 6)$ **en la base** $B(\vec{u}, \vec{v})$**.**

a) $proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = |\vec{v}| \cos\alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{1} = -1$

b) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116°\ 33'\ 54''$

c) $\vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \rightarrow (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 25) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -k + s = 4 \\ 2s = 6 \end{array}\right\}\ s = 3,\ k = -1$

$w = -\vec{u} + 3\vec{v}$

4 **Determina el valor de** y **para que los puntos** $A(0, 1)$**,** $B(-1, 4)$ **y** $C(3, y)$ **estén alineados.**

Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben tener la misma dirección, es decir, deben ser proporcionales.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, 3) \\ \overrightarrow{BC}(4, y - 4) \end{array}\right\}\ \frac{y - 4}{3} = \frac{4}{-1} \rightarrow 4 - y = 12 \rightarrow y = -8$

5 **Halla las coordenadas del vértice** D **del paralelogramo** $ABCD$**, donde** $A(2, 2)$**,** $B(3, 1)$ **y** $C(4, 2)$**.**

$D = (x, y)$

El vector $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ en un paralelogramo.

$\overrightarrow{AB} = (1, -1)$; $\overrightarrow{DC} = (4 - x, 2 - y)$

$\left\{\begin{array}{l} 1 = 4 - x \rightarrow x = 3 \\ -1 = 2 - y \rightarrow y = 3 \end{array}\right. \rightarrow D = (3, 3)$

6 **Halla en las formas paramétrica e implícita la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 3)$ y es perpendicular a la recta $s: \frac{x+1}{2} = 1 - y$.**

$s: \frac{x+1}{2} = 1 - y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$. Vector dirección de s: $\vec{v}(2, -1)$

Un vector perpendicular a $\vec{v}$ es $\vec{u}(1, 2)$.

Buscamos una recta r que pasa por $P(0, 3)$ y tiene como vector dirección a $\vec{u}(1, 2)$:

— Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ t = \dfrac{y-3}{2} \end{array}\right\} x = \frac{y-3}{2} \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

— Ecuación implícita: $2x - y + 3 = 0$

7 **Se consideran las rectas $r: 2x + y - 1 = 0$ y $s: kx - y + 5 = 0$. Determina k en cada uno de los siguientes casos:**

a) r y s son paralelas.

b) r y s se cortan en el punto $P(2, -3)$.

c) r y s son perpendiculares.

a) $r: 2x + y - 1 = 0$

$s: kx - y + 5 = 0$

r y s son paralelas si sus vectores de dirección $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(k, -1)$, lo son:

$$\vec{v} = t\vec{u} \rightarrow (k, -1) = t(2, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} k = 2t \\ -1 = t \end{array}\right\} t = -1,\ k = -2$$

b) Comprobamos que $P(2, -3)$ es un punto de $r \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$

Buscamos ahora el valor de k para el que P también pertenece a s:

$k \cdot 2 - (-3) + 5 = 0 \rightarrow 2k + 8 = 0 \rightarrow k = -4$

c) Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (-1, 2)$, $\vec{d}_s = (1, k)$

Para que sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores de dirección tiene que ser cero.

$$\vec{d}_r \bullet \vec{d}_s = (-1, 2) \bullet (1, k) = -1 + 2k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

8 **Halla la distancia entre las rectas r y s.**

$r: y = x + 2$ $\qquad$ $s: \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}$

Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (1, 1)$, $\vec{d}_s = (1, 1)$, luego son paralelas.

Sea $P \in s$, por ejemplo, $P = (0, -2)$.

$r: y = x + 2 \rightarrow x - y + 2 = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, r) = \left| \frac{-(-2) + 2}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

9 **Obtén la expresión analítica del haz de rectas al que pertenecen $r: 2x + y - 3 = 0$ y $s: x + y - 2 = 0$. Halla la recta de ese haz que pasa por $P(2, 3)$.**

Expresión analítica del haz: $k(2x + y - 3) + t(x + y - 2) = 0$

Como la recta que buscamos ha de pasar por el punto (2, 3),

$k(2 \cdot 2 + 3 - 3) + t(2 + 3 - 2) = 0 \rightarrow 4k + 3t = 0$

Cualquier par de valores de k y t que cumplan la igualdad anterior dan lugar a la misma recta.

Tomamos, por ejemplo, $k = 3$ y $t = -4$. Así:

$3(2x + y - 3) - 4(x + y - 2) = 0 \rightarrow 6x + 3y - 9 - 4x - 4y + 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x - y - 1 = 0$ es la recta del haz que pasa por el punto (2, 3).

10 **Solo una de estas ecuaciones corresponde a una circunferencia. Justifica cuál es y determina su centro y su radio:**

$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

$C_2: x^2 + y^2 - 2xy + 6y + 6 = 0$

$C_3: x^2 + y^2 - 3x + 5x + 18 = 0$

C_1: $r = \sqrt{1+9-6} = 2 \rightarrow$ Circunferencia de centro $O = (-1, 3)$ y radio $r = 2$.

C_2 No es una circunferencia porque tiene término en xy.

C_3: $r^2 = 4 - 18 < 0 \rightarrow$ No es circunferencia porque $r^2 < 0$.

11 **Escribe la ecuación de una elipse de centro (0, 0) y focos en el eje de abscisas, sabiendo que su excentricidad es igual a 4/5 y que uno de sus focos es $F(8, 0)$.**

La ecuación debe ser de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = b^2 + c^2$	• $F(8, 0) = (c, 0) \rightarrow c = 8$
$exc = \dfrac{4}{5} = \dfrac{c}{a}$	• $exc = \dfrac{4}{5} = \dfrac{c}{a} \rightarrow \dfrac{8}{a} = \dfrac{4}{5} \rightarrow a = 10$
$F(8, 0) = (c, 0)$	• $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$

Por tanto, la ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

12 **Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la recta $r: 3x - 4y - 1 = 0$.**

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$dist\,(r, C) = \frac{3 \cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

13 **Determina las coordenadas de un vector unitario $\vec{a}(x, y)$ sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{u}(2, 0)$.**

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 60° \rightarrow 2x = 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Existen, por tanto, dos soluciones: $\vec{a}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\vec{a'}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

14 **Sean $\vec{a}(-5, 5)$ y $\vec{b}(-1, 3)$. Expresa $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno con la misma dirección que $\vec{b}$ y otro perpendicular a $\vec{b}$.**

Los vectores paralelos a $\vec{b}$ son de la forma $k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ son de la forma $s(3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (-5, 5) = k(-1, 3) + s(3, 1) \to \left.\begin{array}{l} -k + 3s = -5 \\ 3k + \ \ s = 5 \end{array}\right\} s = -1,\ k = 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (-2, 6) + (-3, -1)$

15 **Halla el simétrico del punto $A(0, 0)$ respecto a la recta $r: x + y - 2 = 0$.**

- Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a r:

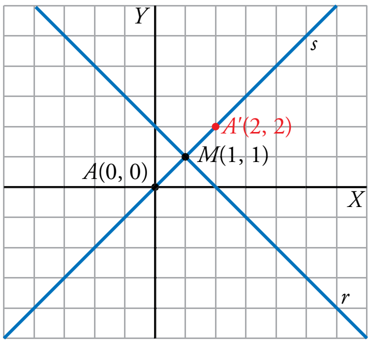
  $s: x - y = 0$

- Punto de intersección de r y s:

  $$\left.\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x = 2 \to x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} M(1, 1)$$

- El punto $A'(x, y)$ que buscamos es el simétrico de A respecto a M:

  $$\left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}\right) = (1, 1) \to \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right\} A'(2, 2)$$



16 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2}$ y forma un ángulo de 45° con la recta r.**

Hallamos el punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{-2} \end{array}\right\} \text{Resolviendo el sistema obtenemos el punto } P(1, 3).$$

La pendiente de r es 2.

$$1 = tg\,45° = \left|\frac{2-m}{1+2m}\right| \begin{array}{l} \nearrow\ 2 - m = 1 + 2m \to m = \dfrac{1}{3} \\ \searrow\ 2 - m = -1 - 2m \to m = -3 \end{array}$$

Hay dos soluciones:

$t: y - 3 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$

$t': y - 3 = -3(x - 1)$

17 **Halla los puntos de la recta $y = 0$ que distan 3 unidades de la recta $3x - 4y = 0$.**

Los puntos de la recta $y = 0$ son de la forma $P(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$r: 3x - 4y = 0$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3x - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x|}{5} = 3$$

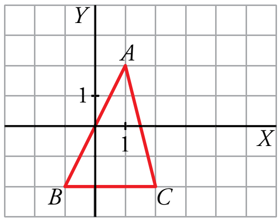
$$|3x| = 15 \begin{cases} 3x = 15 \rightarrow x = 5 \\ 3x = -15 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $P(5, 0)$ y $P'(-5, 0)$.

18 **En el triángulo ABC de la figura, calcula:**

a) El ortocentro.

b) El área del triángulo.



a) Ortocentro: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$, donde h_A, h_B y h_C son las alturas del triángulo desde A, B y C, respectivamente.

$A(1, 2)$ $\quad B(-1, -2)$ $\quad C(2, -2)$

Calculamos las ecuaciones de dos de las alturas:

$$h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow \vec{a} = (0, 3) \\ A(1, 2) \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A\!: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \rightarrow h_A\!: x = 1$$

$$h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (1, -4) \rightarrow \vec{b} = (4, 1) \\ B(-1, -2) \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B\!: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x + 1}{4} \\ t = y + 2 \end{array}\right\} \frac{x + 1}{4} = y + 2 \rightarrow x + 1 = 4y + 8 \rightarrow x - 4y - 7 = 0$$

$h_B: x - 4y - 7 = 0$

Calculamos ahora $h_A \cap h_B$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x - 4y - 7 = 0 \end{array}\right\} 1 - 4y - 7 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$R = h_A \cap h_B = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

b) Área del triángulo $ABC = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}{2}$, donde $M = h_A \cap r_{BC}$ y r_{BC} es la recta que contiene al lado BC.

$$\left.\begin{array}{l} h_A\!: x = 1 \\ r_{BC}\!: y = -2 \end{array}\right\} h_A \cap r_{BC} = (1, -2) = M$$

$\overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3$

$\overrightarrow{AM} = (0, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AM}| = 4$

Área del triángulo $ABC = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ u}^2$

19 **Considera el triángulo formado por la bisectriz del primer cuadrante, b, el eje de abscisas y la recta r: $y = -x + 4$. Obtén:**

a) La mediatriz del lado contenido en la recta r.

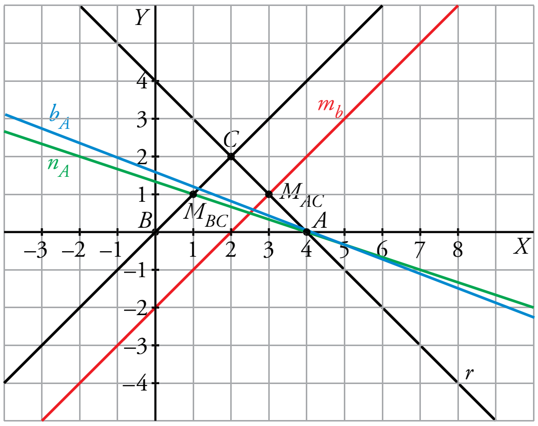
b) La bisectriz del ángulo que forman r y el eje OX.

c) La mediana relativa al lado contenido en b.

Lado AB, eje de abscisas: $y = 0$

Lado BC, bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

Lado AC, recta r: $y = -x + 4$



Vértices:

$$A \to \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 4,\ y = 0 \to A = (4, 0)$$

$$B \to \begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \to x = 0,\ y = 0 \to B = (0, 0)$$

$$C \to \begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \to x = 2,\ y = 2 \to C = (2, 2)$$

a) La mediatriz pasa por M_{AC} y es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-2, 2)$

$M_{AC} = (3, 1)$

Luego m_b: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{2}$

b) Sea $X = (x, y)$ un punto genérico de la bisectriz, entonces cumple:

$$\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}} = |y| \to \begin{cases} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{2}} = y \to x + (1-\sqrt{2})y - 4 = 0 \\ \dfrac{x+y-4}{\sqrt{2}} = -y \to x + (1+\sqrt{2})y - 4 = 0 \end{cases}$$

La bisectriz del ángulo A es b_A: $x + (1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$ porque debe tener pendiente negativa como se observa en el dibujo.

c) La mediana pasa por A y M_{BC}.

$M_{BC} = (1, 1)$

$\overrightarrow{M_{BC}A} = (3, -1)$

Luego n_A: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{-1}$

20 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

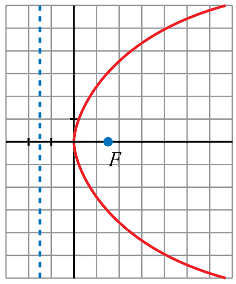
a) $2y^2 - 12x = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $2y^2 - 12x = 0 \;\rightarrow\; y^2 = 6x$

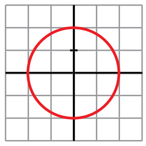


Es un parábola.

Foco $\rightarrow$ $F\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$; recta directriz $\rightarrow$ $r: x = -\dfrac{3}{2}$

Vértice $\rightarrow$ $(0, 0)$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 4$

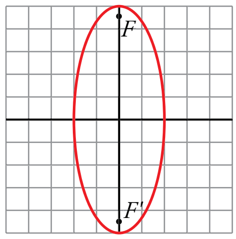


Es una circunferencia.

Centro $\rightarrow$ $(0, 0)$

Radio $\rightarrow$ $r = 2$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



Es una elipse con los focos en el eje Y.

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$a = 5$; $b = 2$; $x = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

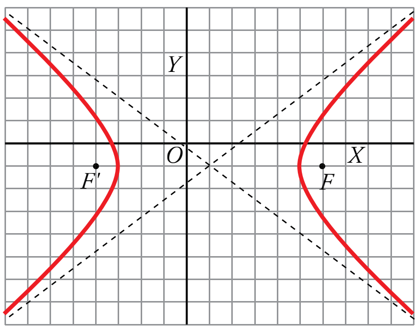
Focos: $F(0, \sqrt{21})$ y $F'(0, -\sqrt{21})$

Semieje mayor: 5

Semieje menor: 2

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



Es una hipérbola.

Centro: $(1, -1)$

Semiejes: $a = 4$; $b = 3$, $c^2 = 4^2 + 3^2 \;\rightarrow\; c = 5$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Asíntotas: $\begin{cases} r: y = \dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \\ r': y = -\dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \end{cases}$

Focos: $F(6, -1)$ y $F'(-4, -1)$

21 **Halla la ecuación de la parábola de vértice $V(-1, -1)$ y directriz $r: x = -3$.**

Puesto que el vértice tiene que equidistar del foco y de la directriz, ha de ser $F(1, -1)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la parábola han de cumplir:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x + 3|$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(y + 1)^2 + x^2 + 1 - 2x = x^2 + 6x + 9 \;\to\; (y + 1)^2 = 8x + 8 \;\to\; (y + 1)^2 = 8(x + 1)$$

La ecuación de la parábola es $(y + 1)^2 = 8(x + 1)$.

22 **Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican:**

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

* ***Toma como eje X la recta que contiene al segmento, y como eje Y la mediatriz de AB.***

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB, y como eje Y, la mediantriz de AB.

En este caso, será $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico del plano que verifica:

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

$$2\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = 18$$

$$2(x^2 + 4x + 4 + y^2) + (x^2 - 4x + 4 + y^2) = 18$$

$$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4x + 12 = 18$$

La ecuación pedida es: $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$.